Skript

Integralrechnung

von

Georg Sahliger

(In Arbeit)

Aktueller Stand

24.08. 2020

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort.. 1
1 Einführung.. 2
2 Anwendung von Flächeninhalten.. 2
3. Einfache Flächenberechnungen.. 3
4 Ober- und Untersummen 5
5 Die Flächeninhaltsfunktion 11
6 Einfache Stammfunktion... 14
7 Umkehrung der Faktor-, Summen- und Kettenregel.. 18
8 Die Stammfunktion der e-Funktion und der ln-Funktion... 19
9. Beweis des Zusammenhangs $A`_0(x) = f(x)$ (LK) 22
10 Auf dem Weg zum Hauptsatz der Integralschreibweise 23
11 Der Hauptsatz der Integralrechnung.. 24
12 Flächeninhalte von Funktionen 26
13 Flächeninhalte zwischen Funktionen 26
14 Partielle Integration (LK) 26
15 Substitution... 27
16 Uneigentliche Integrale 28
17 Volumen von Rotationskörpern 29

0 Vorwort

Abschluss des großen Themas „Funktionale Zusammenhänge“ bildet die Integralrechnung. Dabei geht es darum die Fläche, die von einer Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird, in einem bestimmten Intervall zu berechnen.

1 Einführung

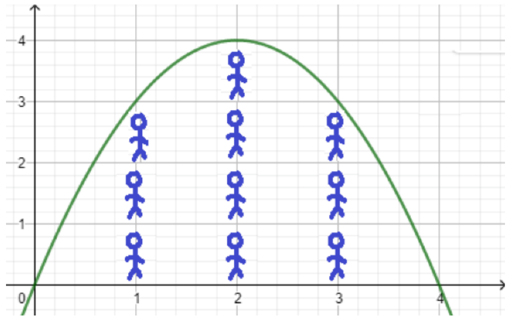
2 Anwendung von Flächeninhalten

Anzahl

Besucher

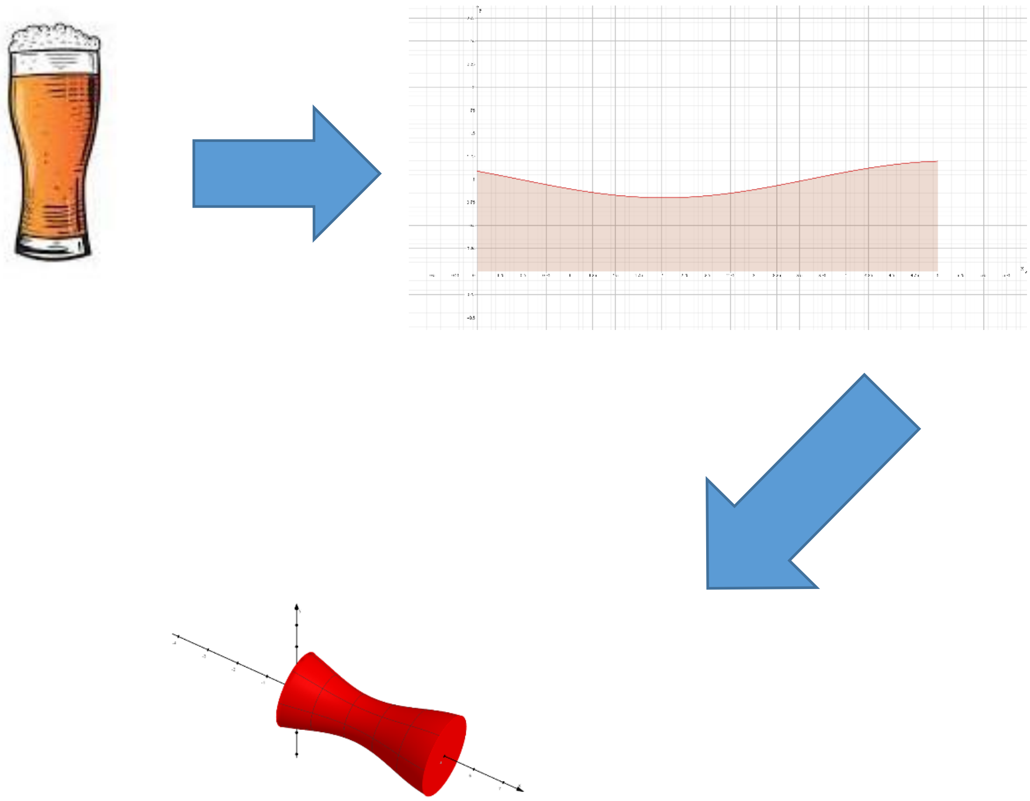
pro Stunde

in 10



Zeit in Stunden

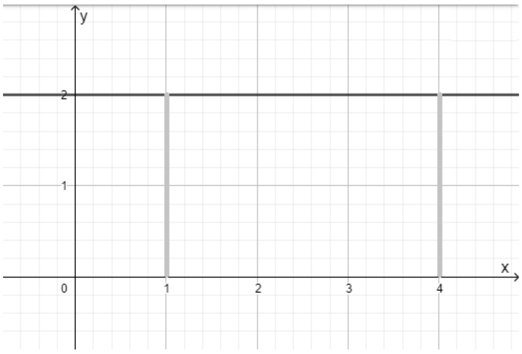
Bierglas Rotationskörper



3. Einfache Flächenberechnungen

Beispiel 1:

Gegeben ist die Funktion f(x) = 2, berechne die Fläche im Intervall I = [1; 4].



Lösungsweg:

$A = f(x) \cdot (x_1 - x_0)$

$A = 2 \cdot 3$

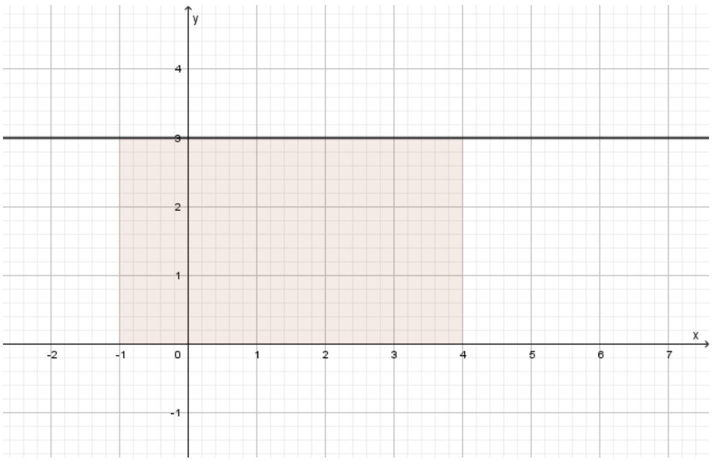
A = 6 FE

FE steht für Flächeneinheiten, wie z.B. m², ha etc. Hier haben wir keine Einheit gegeben, daher formulieren wir allgemein „FE“.

Beispiel 2:

Gegeben ist die Funktion: f(x)= 3

Berechne die Fläche im Intervall I = [-1;4]



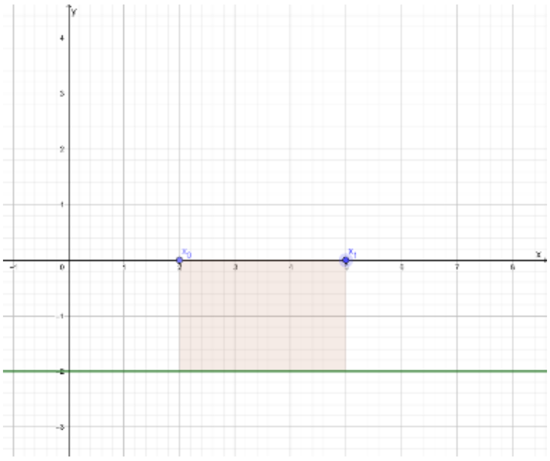
Lösung:

$A = f(x) \cdot (x_1 - x_0) = 3 \cdot 5 = 15$ FE

Beispiel 3:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2$. Berechne die Fläche im Intervall:

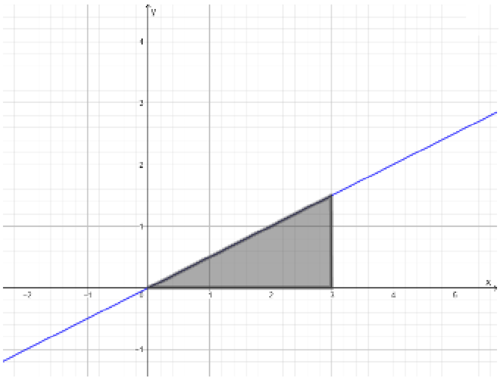
$I = [2; 5]$.



$$A = f(x) \cdot (x_1 - x_0)$$
$$= (-2) \cdot (5 - 2)$$
$$= (-2) \cdot 3$$
$$= -6\ FE$$

Erkenntnis: Flächen können auch negativ sein!

Beispiel 4: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x$ $\quad$ $I = [0; 3]$



$A = f(x) \cdot (x_1 - x_0)$

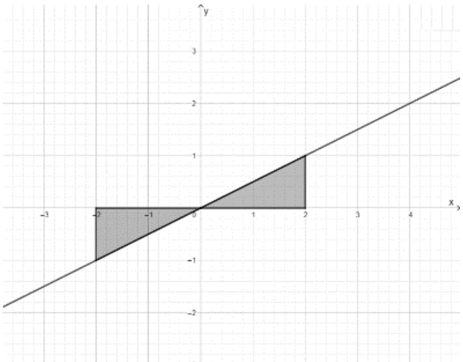
$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 3$

$A = 4{,}5$

$\frac{1}{2} \cdot 4{,}5 = 2{,}25$ FE

Beispiel 5:

$f(x) = \frac{1}{2}x$ $\quad$ $I = [-2; 2]$



Orientierte Fläche:

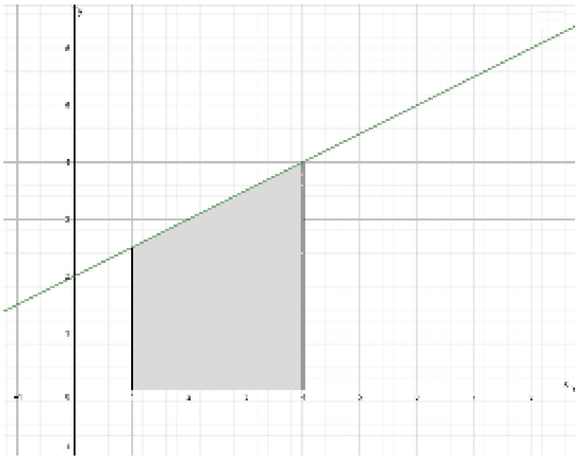
Die negative Fläche zieht sich von der positiven Fläche ab:

0 FE

Absolute Fläche: Die Flächen werden in Betrag genommen und addiert: 2 FE

Beispiel 6:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ I = [0;4]

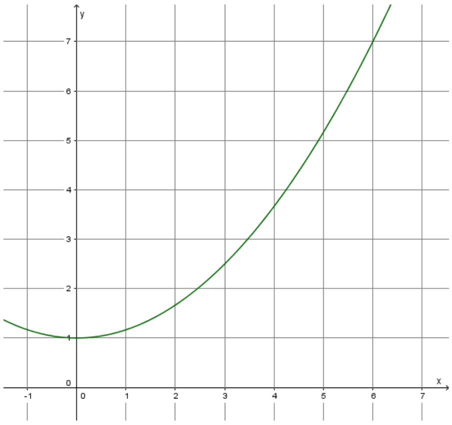


4 Ober- und Untersummen

Bisher haben wir nur Flächeninhalte von einfachen, geradlinigen Funktionen berechnet. Nun stellt sich die Frage, wie wir uns an Flächeninhalte von krummlinigen Funktionen annähern können:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 1$

Bestimme die Fläche im Intervall I = [0 ; 6], die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird.



$A1 = (x1 - x0) \cdot 2{,}5$

$A1 = (4 - 1) \cdot 2{,}5$

$A1 = 7{,}5$ FE

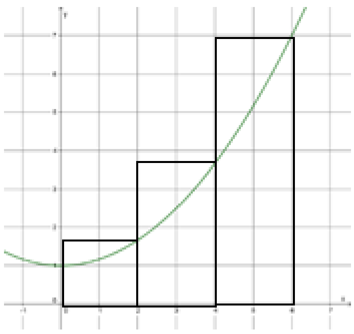
$A2 = \frac{1}{2}(x1 - x0) \cdot 1{,}5$

$A2 = \frac{1}{2}(4 - 1) \cdot 1{,}5$

$A2 = 2{,}25$

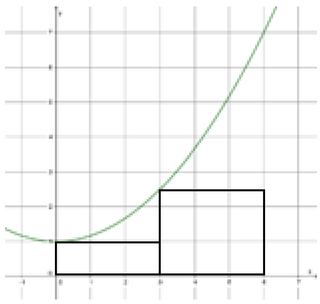
$A = 9{,}75\ FE$

Eine erste Annäherung an den Flächeninhalt erhalten wir über die Unter- oder die Obersumme. Dabei zeichnet man Rechtecke an die Funktion, die sich leicht berechnen lassen.

 Untersumme	 Obersumme

Nachteil: Wie man sieht, erhält man nicht den exakten Flächeninhalt, sondern der errechnete Inhalt ist entweder zu klein (Untersumme) oder zu groß (Obersumme). Wie wir das Verfahren verbessern können, überlegen wir später. Zunächst berechnen wir den Flächeninhalt, indem wir zwei Rechtecke einzeichnen:

Untersumme mit n = 2



$$A_2 = A_1 + A_2$$

$$A_2 = 3 \cdot f(0) + 3 \cdot f(3)$$

$$A_2 = 3 \cdot [f(0) + f(3)]$$

mit $f(x) = x^2 + 1$ gilt: $A_2 = 3 \cdot [0^2 + 1 + 3^2 + 1] = 3 \cdot [0^2 + 1 + 3^2 + 1] = 3 \cdot 11 = 33\ FE$

Formulieren wir dies etwas allgemeiner, um evtl. eine Formel in Abhängigkeit der Anzahl von Rechtecken zu erhalten: Hier war n = 2. Unser Intervall hat eine Länge von 6. Daher gilt für die Länge der einen Rechteckseite: $3 = \frac{6}{2}$.

Für den x-Wert, den wir bei der Untersumme jeweils in die Funktion f(x) einsetzen gilt:

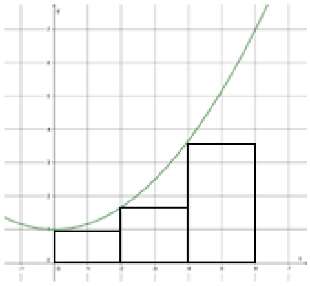
$0 \cdot \frac{6}{2} = 0$ und $1 \cdot \frac{6}{2} = 3$. Daraus folgt:

$$A_n = \frac{6}{2} \cdot \left(\left(0 \cdot \frac{6}{2}\right)^2 + 1\right) \quad + \frac{6}{2} \cdot \left(\left(1 \cdot \frac{6}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$A_n = 3 \cdot [(0 \cdot 3)^2 + 1 + (1 \cdot 3)^2 + 1] = 33\ FE.$$

Etwas genauer wird der Flächeninhalt, wenn wir 3 statt 2 Rechtecke nehmen:

Untersumme mit n = 3

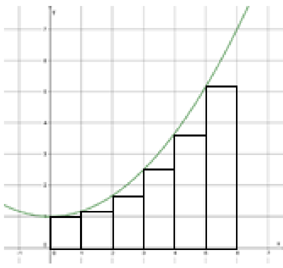


$$A_3 = \frac{6}{3} \cdot \left(\left(0 \cdot \frac{6}{3}\right)^2 + 1\right) \; + \frac{6}{3} \cdot \left(\left(1 \cdot \frac{6}{3}\right)^2 + 1\right) \; \frac{6}{3} \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{6}{3}\right)^2 + 1\right)$$

$$A_3 = 2 \cdot (0 \cdot 2)^2 + 1 + 2 \cdot (1 \cdot 2)^2 + 1 + 2 \cdot (2 \cdot 2)^2 + 1$$
$$A_3 = 2 \cdot [(0 \cdot 2)^2 + 1 + (1 \cdot 2)^2 + 1 + (2 \cdot 2)^2 + 1]$$
$$A_3 = 2 \cdot [(0)^2 + 1 + (2)^2 + 1 + (4)^2 + 1]$$
$$A_3 = 2 \cdot [1 + 4 + 1 + 16 + 1] = 46\ \text{FE}$$

Nun ist der Flächeninhalt schon größer. Eine weitere Verbesserung wäre n = 6:

Untersumme mit n = 6



$$A_6 = \frac{6}{6} \cdot [(0 \cdot \frac{6}{6})^2 + 1 + (1 \cdot \frac{6}{6})^2 + 1 + (2 \cdot \frac{6}{6})^2 + 1 + \left(3 \cdot \frac{6}{6}\right)^2 + 1 + (4 \cdot \frac{6}{6})^2 + 1 + (5 \cdot \frac{6}{6})^2 + 1]$$

$$A_6 = 1 \cdot [(0 \cdot 1)^2 + 1 + (1 \cdot 1)^2 + 1 + (2 \cdot 1)^2 + 1 + (3 \cdot 1)^2 + 1 + \ldots + (4 \cdot 1 + 1)^2 + (5 \cdot 1)^2 + 1]$$

$$A_6 = 1 \cdot [(0)^2 + 1 + (1)^2 + 1 + (2)^2 + 1 + (3)^2 + 1 + (4)^2 + 1 + 5 + 1]$$

$$A_6 = [6 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25] = 61\ \text{FE}$$

Klar, je mehr Rechtecke wir berechnen, desto genauer wird der Flächeninhalt. Am besten arbeitet man mit unendlich vielen Rechtecken. Also $n \rightarrow \infty$. Dies erinnert an die Differentialrechnung. Bei der x-Methode bzw. h-Methode haben wir die Steigung zwischen zwei Punkten berechnet. Diese haben wir immer enger angenähert bis der Abstand am Ende gegen unendlich klein lief. Der Grenzwert, gegen den die Steigung „lief, ergab die Steigung in dem Punkt. Auch hier nehmen wir immer mehr Rechtecke und nähern so den Flächeninhalt immer mehr an den eigentlichen Flächeninhalt an. Der (Grenz-)Flächeninhalt, an den sich dies annähert, ist der Flächeninhalt unter der Funktion. Formulieren wir unsere Formel erst einmal allgemein.

Untersumme allgemein: $n = n$

$$A_n = \frac{6}{n} \cdot \left(\left(0 \cdot \frac{6}{n}\right)^2 + 1\right) + \frac{6}{n} \cdot \left(\left(1 \cdot \frac{6}{n}\right)^2 + 1\right) + \frac{6}{n} \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{6}{n}\right)^2 + 1\right) + \frac{6}{n} \cdot \left(\left(3 \cdot \frac{6}{n}\right)^2 + 1\right) + \cdots$$

$$+ \frac{6}{n} \cdot ((n-1) \cdot \frac{6}{n})^2 + 1)$$

$$A_n = \frac{6}{n} \cdot [(0 \cdot \frac{6}{n})^2 + 1 + (1 \cdot \frac{6}{n})^2 + 1 + (2 \cdot \frac{6}{n})^2 + 1 + (3 \cdot \frac{6}{n})^2 + 1 + \ldots + ((n-1) \cdot \frac{6}{n})^2 + 1]$$

An dieser Stelle wird klar, dass man den Flächeninhalt nicht einfach schnell berechnen kann. Meist benötigt man die Summenformeln, die im Kapitel „Folgen und Reihen“ behandelt wurden. Betrachten wir hierzu ein etwas einfacheres Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f(x) = x² berechne den Flächeninhalt im Intervall I = [0 ; 1] mit der Untersumme.

Nähern wir uns zur Übung zunächst mit n = 2 an:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(0 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (0)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot [(0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2] = \frac{1}{8} \text{ FE.}$$

Für n = 3 ergibt sich:

$$A_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(0 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)^2$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \cdot (0)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \cdot [0 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}] = \frac{5}{27} \text{ FE.}$$

Für n = 4 ergibt sich:

$$A_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(0 \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{4}\right)^2$$

$$A_4 = \frac{1}{4} \cdot (0)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$A_4 = \frac{1}{4} \cdot [0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}] = \frac{14}{64} \text{ FE.}$$

Für n = n ergibt sich:

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot \left(0 \cdot \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left((n-1) \cdot \frac{1}{n}\right)^2$$

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot (0)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot [0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2]$$

„Spalten“ wir die Brüche auf:

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot [0^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 1}{n}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{(n-1) \cdot 1}{n}\right)^2]$$

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot [0^2 + 1^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + 3^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + (n-1)^2 \left(\frac{1}{n}\right)^2]$$

Nun klammern wir $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ aus:

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \;[0^2 + 1^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 3^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + (n-1)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2]$$

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \;[0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

Hier kommen wir leider nicht weiter, da wir mit der unendlichen Summe (+…+) nicht rechnen können:

Aus dem Kapitel „Folgen und Reihen“ kennen wir aber noch die Summenformel, die wir mit vollständiger Induktion hergeleitet haben:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$

Setzen wir dies in unsere Untersumme ein:

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$

$$A_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1)$$

Die n^3 aufgeteilt:

$$A_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n}$$

$$A_n = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n} \cdot \left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}\right)$$

$$A_n = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

Hier haben wir eine allgemeine Formel. Nun können wir n gegen unendlich gehen lassen und erhalten den exakten Flächeninhalt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{6} \cdot (1-0) \cdot 1 \cdot (2-0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ FE}$$

Aufgabe: Berechne die Obersumme von $f(x) = x^2$ und n = 2, n = 4, und n = n im Intervall I = [0 ; 2].

Obersumme mit n=2

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2)$$

$$A = \frac{2}{2} \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{2}\right)^2 + \frac{2}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{2}\right)^2$$

$$A = 1 \cdot (1^2 + 2^2) = 5\ FE$$

Obersumme mit n=4

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A = 0{,}5 \cdot f(0{,}5) + 0{,}5 \cdot f(1) + 0{,}5 \cdot f(1{,}5) + 0{,}5 \cdot f(2)$$

$$A = \frac{2}{4} \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{4}\right)^2 + \frac{2}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{4}\right)^2 + \frac{2}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{4}\right)^2 + \frac{2}{4} \cdot \left(4 \cdot \frac{2}{4}\right)^2$$

$$A = 0{,}5 \cdot (0{,}5^2 + 1^2 + 1{,}5^2 + 2^2) = 3{,}75\ FE$$

Obersumme mit n=n

$$A_n = \frac{2}{n} \cdot \left(1 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{2}{n} \cdot \left((n-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2$$

$$A_n = \frac{2}{n} \cdot \left[\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \left(3 \cdot \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left((n-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2\right]$$

5 Die Flächeninhaltsfunktion

Unter der Flächeninhaltsfunktion verstehen wir die Funktion$A_0\,(x)$, die zu einer gegeben Funktion und zu jedem x des Intervalls I = [0 ; x] den Flächeninhalt angibt.

Beispiel 1:

Gegeben sei $f(x) = 2$

Wie oben schon berechnet, lautet die gesuchte Flächeninhaltsfunktion: $A_0\,(x) = 2 \cdot x$

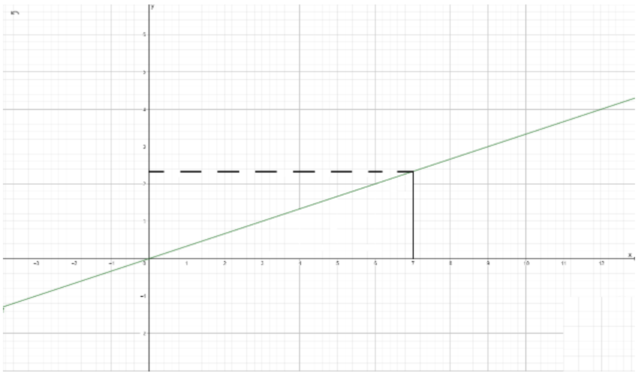
Sei x = 2, also der Flächeninhalt im Intervalls I = [0 ; 2], dann ist $A_0\,(2) = 2 \cdot 2 = 4$ FE.

Sei x = 3, also der Flächeninhalt im Intervalls I = [0 ; 3], dann ist $A_0\,(3) = 2 \cdot 3 = 6$ FE.

Im Grunde rechnet man wie bisher nur dass wir x statt einer konkreten Zahl nehmen.

Beispiel 2:

Gegeben sei *f(x)* = $\frac{1}{3}x$



A_0 *(x)* = $\frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x \cdot x = \frac{1}{6}x^2$

Sei x = 1 => A_0 (1) = $\frac{1}{6} \cdot 1^2$ = $\frac{1}{6}$ FE

Sei x = 6 => A_0 (6) = $\frac{1}{6} \cdot 6^2$ = $\frac{36}{6} = 6$ FE

Beispiel 3:

f(x) = x

$A_0\,(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot x = \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$

Beispiel 4:

$f(x) = x + 2$

$$A_0(x) = 2x + \frac{1}{2}[(f(x) - 2) \cdot x]$$

$$= 2x + \frac{1}{2}[((x + 2) - 2) \cdot x]$$

$$= 2x + \frac{1}{2}x \cdot x$$

$$A_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

Etwas schwieriger ermittelt man die Flächeninhaltsfunktion für $y = x^2$.

Mit Obersumme gilt:

$$O_n = \frac{x}{n}\left[\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(2\,\frac{x}{n}\right)^2 + \left(3\,\frac{x}{n}\right)^2 + \dots + \left(n\frac{x}{n}\right)^2\right]$$

$$= \frac{x}{n} \cdot \frac{x^2}{n^2} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

Hier verwenden wir wieder die Summenformel aus dem Kapitel Folgen und Reihen:

$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{x^3}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}$$

$$= \frac{x^3}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

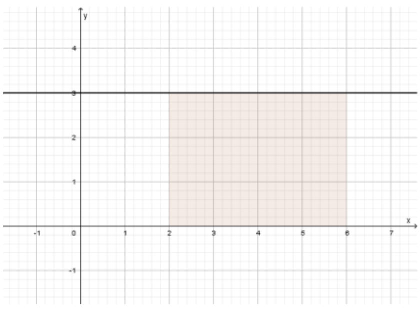
Nun wieder n gegen unendlich: $A_O(x) = \lim\limits_{n \to \infty} O_n$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{x^3}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{x^3}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{6}\,x^3 = \frac{1}{3}\,x^3$$

$$A_O(x) = \frac{1}{3}\,x^3$$

Möchten wir nun den Flächeninhalt nicht nur im Intervall I = [a ; b] , also nicht bei 0 beginnend, berechnen so teilen wir das Intervall in I_1 = [0 ; a] und I_2 = [0 ; b] auf und subtrahieren $I_2 - I_1$.



Gegeben sei f(x) = 3 Berechne die Fläche im Intervall Intervall I = [2 ; 6]

Intervalls I = [0 ; 2], dann ist $A_0\,(2) = 3 \cdot 2 = 6$ FE.

Intervalls I = [0 ; 6], dann ist $A_0\,(2) = 3 \cdot 6 = 18$ FE.

Nun berechne FE(6) – FE(2) = 18 FE – 6 FE = 12 FE.

Aufgabe

a) Wie lautet die Flächeninhaltsfunktion $A_0(x)$ zur unteren Grenze 0 für die Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^2$?
b) Wie groß sind die Flächeninhalte zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über den Intervallen $[0;1]$ und $[0;2]$?
c) Wie groß ist der Flächeninhalt über dem Intervall $[1;2]$

Lösung:

a) $A_0(x) = \frac{1}{9}x^3$
b) Für das Intervall $[0;1]$ $A_0(1) = \frac{1}{9}1^3 = \frac{1}{9}$

Für das Intervall $[0;1]$ beträgt der Inhalt der Fläche $\frac{1}{9}$ FE

Für das Intervall $[0;2]$ $A_0(2) = \frac{1}{9}2^3 = \frac{8}{9}$

Für das Intervall $[0;2]$ beträgt der Inhalt der Fläche $\frac{8}{9}$ FE

c) Der Inhalt ergibt sich, indem man den Inhalt vom Intervall $[0;1]$von dem Inhalt vom Intervall $[0;2]$ subtrahiert.

$\frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

Für das Intervall $[1;2]$ beträgt der Inhalt der Fläche $\frac{7}{9}$ FE

6 Einfache Stammfunktion

Stellen wir die Funktionen und ihre Flächeninhaltsfunktionen aus dem vorherigen Kapitel noch einmal gegenüber.

$A_0\,(x) = 2x$ $\qquad$ $f(x) = 2$

$A_0\,(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $f(x) = x$

$A_0\,(x) = \frac{1}{6}x^2$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{3}x$

$A_0\ (x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x \qquad f(x) = x + 2$

$A_0\ (x) = \frac{1}{3}\ x^3 \qquad f(x) = x^2$

Man kann beobachten, dass die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion $A_0\ (x)$ zu der eigentlichen Funktion f(x) führt.

Dies bringt uns zum Begriff der „Stammfunktion“:

Unter einer Stammfunktion F(x) verstehen wir diejenige Funktion, die abgeleitet f(x) ergibt, also F‘(X) = f(x).

Beispiel: Sei f(x) = 2x.

Dann ist F(x) = x^2 eine Stammfunktion, da die Ableitung von F(x) = x^2 gleich f(x) = 2x.

Dabei gilt, dass jede Funktion f(x) unendlich viele Stammfunktionen besitzt.

Beispiel:

F(x) = 2x + 1

F(x) = 2x + 2

F(x) = 2x + 3

usw.

sind alles Stammfunktionen zu der Funktion f(x) = 2. Daher schreiben wir ausführlich F(x) = 2x + C. Stammfunktionen dieser Form bezeichnen wir auch als **unbestimmtes Integral**.

Nun einige Funktionen und Stammfunktionen:

Ähnlich wie bei den Ableitungen gibt es auch für Stammfunktionen Regeln, wie man diese findet.

Klar von den Ableitungsregeln her, sind folgende Fälle:

$f(x) = 2$ ist $F(x) = 2x + C$, da $F'(x) = 2x + C \Rightarrow f(x) = 2$

$f(x) = 0$ ist $F(x) = C$, da z.B. umgekehrt gilt: $F'(x) = 2 \Rightarrow f(x) = 0$

Für weitere Funktionen gilt folgende Regel:

$$f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C$$

Beispiel:

$f(x) = x$ bzw. $f(x) = x^1$ Nach der Regel geht man folgendermaßen vor:

Man erhöht den Exponenten um 1 und schreibt dies in den Nenner vor den Bruch!

$f(x) = x$ und $F(x) = \frac{1}{1+1}\, x^{1+1} + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + C$. Leiten wir F(x) wieder ab, dann erkennen wir, dass F(x) wirklich die Stammfunktion von f(x) ist:

$F(x) = \frac{1}{2}\, x^2 + C \Rightarrow F`(x) = \frac{2}{2}\, x^1 \Rightarrow f(x) = x$

Weitere Beispiele:

a) $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2+1}\, x^{2+1} + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}\, x^3 + C$

b) $f(x) = 2x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{2+1}\, x^{2+1} + C \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\, x^3 + C$

c) $f(x) = 2x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3+1}\, x^{3+1} + C \Rightarrow F(x) = \frac{2}{4}\, x^4 + C \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\, x^4 + C$

Weniger ausführlich die weiteren Beispiele:

$f(x) = 6x + 2$		$F(x) = 3x^2 + 2x + C$	________
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$		$F(x) = \frac{1}{2 \cdot 3}\, x^3 + C$	$F(x) = \frac{1}{6}\, x^3 + C$
$f(x) = \frac{3}{4}x^5$		$F(x) = \frac{3}{24}\, x^6 + C$	$F(x) = \frac{1}{8}\, x^6 + C$
$f(x) = x^{-2}$		$F(x) = \frac{1}{-1}\, x^{-1} + C$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$
$f(x) = x^{-4}$		$F(x) = \frac{1}{-3}\, x^{-3} + C$	$F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C$
$f(x) = \frac{2}{x^3}$	$f(x) = 2 \cdot x^{-3}$	$F(x) = \frac{2}{-2}\, x^{-2} + C$	$F(x) = -\frac{1}{x^2} + C$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$	$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt[2]{x^3} + C$
$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$	$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$	$F(x) = \frac{1}{\frac{5}{3}} x^{\frac{5}{3}} + C$	$F(x) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$

Bei der Ableitung der Sinusfunktion haben wir folgenden Kreis aufgestellt:

sin(x)

-cos (x) cos(x)

-sin(x)

Gilt für f ´(x) = sin(x) => f(x) = cos (x) ist, so findet man die Stammfunktion umgekehrt:

f(x) = sin(x) => F(x) = -cos (x) + C

Bemerkung: Umgangssprachlich hört man oft den Ausdruck „Aufleiten“, den man aber eher vermeiden sollte. Besser: „Wir ermitteln die Stammfunktion.“

7 Umkehrung der Faktor-, Summen- und Kettenregel

Zur Erinnerung:

Faktorregel: Sei $f(x) = a \cdot g(x)$, dann gilt: $f'(x) = a \cdot g'(x)$

Beispiel: Sei $f(x) = 2 \cdot x^3$, dann gilt: $f'(x) = 2 \cdot 3x^2$

Summenregel: Sei $f(x) = g(x) + h(x)$, dann gilt: $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Beispiel: Sei $f(x) = x^3 + 3x$, dann gilt: $f'(x) = 3x^2 + 3$

Die Umkehrung der beiden Regeln haben wir schon in Kapitel 5 angewendet. Etwas interessanter ist die Umkehrung der Kettenregel:

Beispiel: $f(x) = \sin(2x + 3)$, dann gilt: $f'(x) = 2 \cdot \cos(2x + 3)$

Umgekehrt gilt: $f(x) = \cos(2x + 3)$ $F(x) = \frac{1}{2} sin(2x + 3)$

Probe: Sei $F(x) = \frac{1}{2} sin(2x + 3)$. Daraus folgt $F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}\cos(2x + 3) = \cos(2x + 3)$.

Diese Anwendung funktioniert nur, wenn die innere Funktion $(2x + 3)$ linear und nicht quadratisch $(2x^2 + 3)$ oder noch höher ist.

Weiteres Beispiel:

Sei $f(x) = \cos(4x + 3)$ daraus folgt: $F(x) = \frac{1}{4} sin(4x + 3)$ bzw.

Formulieren wir die Regel allgemeiner:

Sei $f(x) = f(ax + b)$ daraus folgt: $F(x) = \frac{1}{a}\ F(ax + b)$

Weiteres Beispiel: Sei $f(x) = (2x - 4)^3$ daraus folgt: $F(x) = \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot (2x - 4)^4 = \frac{1}{8}(2x - 4)^4$

Allgemein: $f(x) = (ax + b)^c$ daraus folgt: $\frac{1}{a \cdot (c+1)}(ax + b)^{c+1}$

Aufgabe: Ermittle die Stammfunktion der folgenden Funktionen:

a) Sei f(x) = -sin(3x -2) b) f(x) = $(-2x + 4)^2$ c) $f(x) = \sqrt{3x+4}$

Lösung:

a) F(x) = $\frac{1}{3}cos(3x-2)$ bzw.
b) F(x) = $\frac{1}{-2\cdot 3} \cdot (-2x+4)^3$ = $-\frac{1}{6} \cdot (-2x+4)^3$

c) Schreiben wir noch einmal die Funktion um: $f(x) = (3x+4)^{\frac{1}{2}}$

Daraus folgt: $F(x) = \frac{1}{3\cdot\frac{3}{2}}(3x+4)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}(3x+4)^{1,5}$

Aufgabe: Zeige, dass F(x) = x^2 eine Stammfunktion der Funktion f(x) = 2x ist.

Lösung: Oft ist dies einfacher zu zeigen, wenn man die Stammfunktion ableitet und zeigt, dass dies zur Funktion f(x) führt.

Sei F(x) = x^2, dann gilt: F`(x) = 2x = f(x).

=> F(x) ist eine Stammfunktion.

8 Die Stammfunktion der e-Funktion und der ln-Funktion

Wiederholen wir zunächst die Ableitungsregeln:

Sei $f(x)=e^x$. Dann ist auch $f'(x)=e^x$. Schwierigere Funktionen leitet man mit der Kettenregel ab. Dabei können wir nur e-Funktionen ableiten, deren Hochzahl linear ist und nicht quadratisch, kubisch oder noch höher ist.

Beispiele für e-Funktionen mit linearer Hochzahl: $f(x) = e^{5x}$ oder $f(x) = e^{3x-2}$ im Gegensatz zu e-Funktionen mit höherer Hochzahl: $f(x) = e^{5x^2} oder \ f(x) = e^{3x^3-2}$.

Für die Ableitung von $f(x) = e^{3x}$ gilt: $f'(x) = e^{3x} \cdot 3$. „Nichtlineare e-Funktionen“ wie $f(x) = e^{3x^2}$ können wir (noch) nicht ableiten. Bei zusammengesetzten Funktionen leitet man nach den bekannten Regeln, z.B. Produktregel ab:

$f(x) = e^{3x} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = e^{3x} \cdot 3 \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x} \cdot (6x + 2)$.

Auch die ln-Funktion leitet man mit der Kettenregel ab und auch hier können wir nur „lineare ln-Funktionen“ ableiten. Beispiele:

Sei $f(x)=\ln(x)$, dann ist $f'(x)=\frac{1}{x}$ Beispiel: $f(x) = ln(3x)$, dann ist $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$

Aus der Wiederholung ergeben sich folgende Regeln für das Bilden der Stammfunktionen:

Stammfunktionen können wir mit unserem jetzigen Wissenstand nur angeben, wenn die Hochzahl der e-Funktion linear ist.

Sei $f(x)=e^{mx+c}$, dann folgt daraus $F(x)=\frac{1}{m}e^{mx+c}$ + C.

Auch hier gilt die Umkehrung der Kettenregel:

Beispiele	
f(x)	**F(x)**
$f(x) = e^{5x}$	$F(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + C$
$f(x)=20\, e^{10x}$	$F(x) = \frac{20}{10} e^{10x} = 2\, e^{10x} + C$
$f(x)=4\, e^{5x}$	$F(x) = \frac{4}{5} e^{5x} + C$
$f(x) = e^{2x+3}$	$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$
$f(x) = e^{-k \cdot x}$	$F(x) = -\frac{1}{k} \cdot e^{-k \cdot x} + C$

Nehmen wir als nächstes die Funktion f(x) = $\frac{1}{x}$.

Die bisherige Anwendung der Regeln scheitert, wie folgende Rechnung zeigt:

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ daraus würde folgen: $F(x) = \frac{1}{0}x^0$, wobei man hier durch 0 teilen würde.

Hier hilft uns die folgende Regel:

Für die ln-Funktionen gilt:

Eine Stammfunktion der Funktion f mit f(x) = $\frac{1}{x}, x \neq 0$, ist die Funktion F mit F(x) = ln(|x|) + C.

Beweis:

Beispiele:

a) Sei $f(x) = \frac{2}{x}$ => $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$ Daraus ergibt sich: $F_{(x)} = 2 \cdot ln(|x|)$ + C

b) Sei $f(x) = \frac{1}{2x}$ => $f(x) = \frac{1}{2}x$ Daraus ergibt sich: $F_{(x)} = \frac{1}{2}ln(|x|)$ + C

Klar: Für Sei $f(x) = \frac{1}{x^2}$ egibt sich das Problem nicht, da der Exponent nicht 0 wird, wenn man die Stammfunktion bildet.

Beweis:

Vorbemerkung: Aus dem Skript „e-Funktionen“ wissen wir, dass gilt: $e^{ln(x)} = x$ mit x > 0 für ln(x)

$$e^{ln(x)} = x \text{ Nach der Kettenregel abgeleitet:}$$

$$e^{ln(x)} \cdot ln'(x) = 1$$

$$=> x \cdot ln'(x) = 1$$

$$=> ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Also aus ln‘(x) = $\frac{1}{x}$ folgt im Umkehrschluss: Ist f(x) = $\frac{1}{x}$, dann gilt $F_{(x)} = ln(|x|)$.

Ohne Beweis führen wir folgende weitere Regel für den speziellen Fall, dass der Zähler einer Funktion die Ableitung des Nenners ist, ein:

Eine Stammfunktion der Funktion f mit f(x) = $\frac{v'(x)}{v(x)}, x \neq 0$, ist die Funktion F mit F(x) = ln(|v(x)|) +C.

Beispiel: Sei $f(x) = \frac{2}{2x}$ $F(x) = ln(|2x|)$

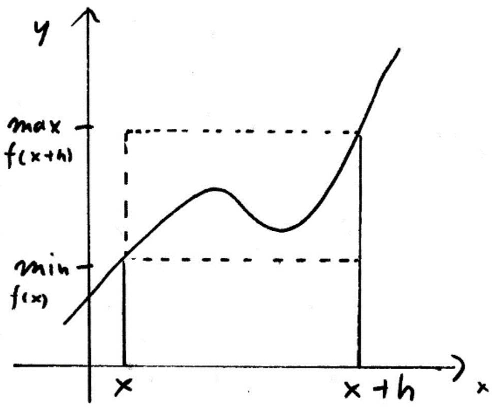
9. Beweis des Zusammenhangs A`$_0$(x) = f(x) (LK)

Bisher haben wir nur vermutet, dass die Ableitung der Flächeninhalt wieder zu der eigentlichen Funktion f(x) führt.

Satz: Sei f eine nicht negative, differenzierbare Funktion. A0 sei die Flächeninhaltsfunktion von f zur unteren Grenze 0. Dann gilt:

A_0`(x) = f(x) Klar ist übrigens, dass gilt: $A_0(0) = 0$

Zeigen wir das nicht nur im Intervall von [0,x] , sondern gleich allgemeiner im Intervall [x , x+h]. Um dies zu berechnen, gilt wie oben schon gezeigt: $A_0(x+h) - A_0(x)$. Man berechnet also die Fläche auf dem Intervall [0, x+h] und subtrahiert davon die Fläche auf dem Intervall [0, x].



Da f eine differenzierbare Funktion ist, ist sie auch stetig. Das bedeutet, dass f in jedem abgeschossenen Intervall [x , x+h] ein Minimum und ein Maximum besitzt. Somit gibt es eine minimale Fläche A_1 = min · h und eine maximale Fläche A_2 = max · h, die die Fläche $A_0(x+h) - A_0(x)$ einschließt.

Somit gilt:

$A_1 \le A_0(x+h) - A_0(x) \le A_2$

=> $\min \cdot h \le A_0(x+h) - A_0(x) \le \max \cdot h$ Geteilt durch h ergibt sich:

$\min \le \frac{A_0(x+h)-A_0(x)}{h} \le \max$

Lassen wir nun h gegen 0 laufen, dann erkennen wir folgendes.

Die minimale und maximale Fläche verdünnen sich, bis sie nur noch ein „Strich“ mit der Höhe f(x) sind. $\frac{A_0(x+h)-A_0(x)}{h}$ ist ja der Differenzenquotient der h-Methode. Daher schreiben wir: $\frac{A_0(x+h)-A_0(x)}{h} = A_0`(x)$.

Zusammengefasst $h \to 0$

$\min \le \frac{A_0(x+h)-A_0(x)}{h} \le \max$

$f(x) \le \frac{A_0(x+h)-A_0(x)}{h} \le f(x)$

Also folgt daraus: $A_0`(x) = f(x)$

10 Auf dem Weg zum Hauptsatz der Integralschreibweise

Definition: Die Funktion f sei stetig auf dem Intervall [a ; b] und es gelte

$A_n = f(z_1) \cdot \Delta x + f(z_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(z_n) \cdot \Delta x$

Sei eine beliebige Rechtecksumme zu f über dem Intervall [a;b].

Dann heißt der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A_n$ Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b.

Man schreibt dafür $\int_a^b f(x)\,dx$ (lies: Integral von f(x) von a bis b.)

a ist hierbei die untere Grenze und b die obere Grenze. Das x bei dx bezeichne ich als die Integrationsvariable und f(x) nenne ich den Integrant. a und b sind die Integrationsgrenzen.

Ist das Intervall I = [0 ; b], so kann ich die Fläche nun direkt mit der Flächeninhaltsfunktion berechnen. Als Flächeninhaltsfunktion nehme ich die Stammfunktion. Allerdings ohne die Konstante C

11 Der Hauptsatz der Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

f sei eine differenzierbare Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\ \ bzw. \int_a^b F'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

$[F(x)]_a^b$ ist dabei eine Abkürzung für Differenz F(b) – F(a)

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion f(x) = 2x

Berechne die Fläche im Intervall I = [0; 2]

Beispiel: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 2x\ dx = \left[\frac{2}{2}x^2\right]_0^2 = \left[1x^2\right]_0^2$ = [2²] - [0²] = 4 – 0 = 4 FE

Gegeben ist die Funktion f(x) = x

Berechne die Fläche im Intervall I = [1; 2]

Beispiel: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^2 x\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = [\frac{1}{2}2^2] - [\frac{1}{2}1^2]$ = 2 – 0,5 = 1,5 FE

Satz 2: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
Die Funktion f sei stetig auf dem Intervall $[a; b]$. Dann gilt:
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ für eine beliebige Stammfunktion F von f auf $[a; b]$.

Bei der Hinführung zum Hauptsatz wurde anschaulich mit Größen gearbeitet. Jetzt wird mit der Definition des Integrals argumentiert.

Beweis von Satz 2: Gegeben ist eine Funktion f und eine beliebige Stammfunktion F von f über $[a; b]$.
Man zeigt: Wenn man das Intervall $[a; b]$ in n gleiche Teile Δx teilt (Fig. 1), dann gibt es in jedem Intervall Δx eine Stelle z_n mit $F(b) - F(a) = \lim\limits_{n \to \infty} [f(z_1) \cdot \Delta x + f(z_2) \cdot \Delta x + \ldots + f(z_n) \cdot \Delta x]$.

Für den Beweis schreibt man die Differenz $F(b) - F(a)$ als Summe von Differenzen:
$F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + (F(x_3) - F(x_2)) + \ldots + (F(x_n) - F(x_{n-1}))$.

In Fig. 2 ist das Intervall $[x_2; x_3]$ vergrößert dargestellt. Dazugezeichnet ist die Sekante durch die Punkte $(x_2 | F(x_2))$ und $(x_3 | F(x_3))$.
Sie hat die Steigung $\frac{F(x_3) - F(x_2)}{x_3 - x_2}$.
Im Intervall $[x_2; x_3]$ gibt es eine Stelle z_3, an der der Graph von F dieselbe Steigung wie die Sekante hat (vgl. Tangente in Fig. 2), was hier nicht bewiesen wird.

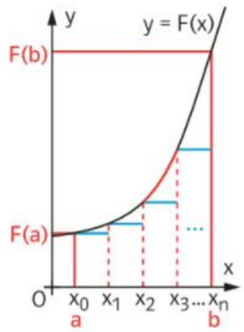


Fig. 1

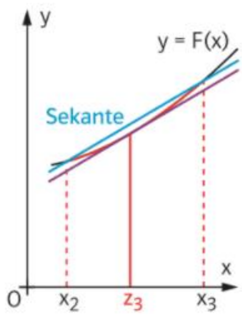


Fig. 2

Es gilt: $F'(z_3) = f(z_3) = \frac{F(x_3) - F(x_2)}{x_3 - x_2}$, das heißt,
$F(x_3) - F(x_2) = f(z_3) \cdot (x_3 - x_2) = f(z_3) \cdot \Delta x$.
Da diese Überlegung für jedes Teilintervall durchführbar ist, gilt:
$F(b) - F(a) = f(z_1) \cdot \Delta x + f(z_2) \cdot \Delta x + f(z_3) \cdot \Delta x + \ldots + f(z_n) \cdot \Delta x$.

Für $n \to \infty$ ist der Grenzwert der rechten Seite der Gleichung gerade das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Der Unterschied zwischen einem *unbestimmten* und *bestimmten Integral* für differenzierbare Funktion f wird durch die folgende Gegenüberstellung noch einmal verdeutlicht.

Das unbestimmte Integral	Das bestimmte Integral
ist die **Menge** aller Stammfunktionen: $\int f(x)\,dx = F(x) + C.$	Ist eine reelle Zahl: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}.$

Diese Regeln beschreiben die sogenannte **Linearität** des Integrals.

Satz 2: Rechenregeln für Integrale

a) $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ b) $\int_a^b (g(x) + h(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx.$

Nachweis beispielhaft für a): Es sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = [c \cdot F(x)]_a^b = c \cdot F(b) - c \cdot F(a) = c \cdot (F(b) - F(a));$

$c \cdot \int_a^b f(x)\,dx = c \cdot [F(x)]_a^b = c \cdot (F(b) - F(a)).$

12 Flächeninhalte von Funktionen

13 Flächeninhalte zwischen Funktionen

14 Partielle Integration (LK)

Stammfunktion finden mit partieller Integration

Aufgabe: bestimme die Stammfunktion von fa(x) = $2a^2\,x - e^{-0,5\,ax}$

Partielle Integration: $\int_0^x u' \cdot v = [\,u \cdot v\,]_0^x - \int_0^x u \cdot v'$

Wähle als v das, was durch Ableiten „einfacher" wird.

fa(x) = $\underbrace{2a^2\,t}_{v} \cdot \underbrace{e^{-0,5at}}_{u'}\,dt$

u' = $e^{-0,5at}$

u = $\frac{1}{-0,5a} \cdot e^{-0,5at}$

da für lineare e-Funktionen gilt:

f(x) = e^{mx+b}

F(x) = $\frac{1}{m} \cdot e^{mx+b}$

$$\int_0^x u' \cdot v = \left[\frac{1}{-0.5a} \cdot e^{-0.5at} \cdot 2a^2 t\right]_0^x - \int_0^x 2a^2 \cdot \frac{1}{-0,5a} \cdot e^{-0.5at}\,dt$$

$$\int_0^x u' \cdot v = \left[-\frac{2}{a} \cdot e^{-0.5at} \cdot 2a^2 t\right]_0^x - 2a^2 \int_0^x -\frac{2}{a} \cdot e^{-0.5at}\,dt$$

$$\int_0^x u' \cdot v = \left[-\frac{2 \cdot 2a^2 t}{a} \cdot e^{-0.5at}\right]_0^x - 2a^2 \cdot \left(-\frac{2}{a}\right) \int_0^x e^{-0.5at}\,dt$$

$$\int_0^x u' \cdot v = \left[-4at \cdot e^{-0.5at}\right]_0^x + 4a \int_0^x e^{-0.5at} \ dt$$

$$\int_0^x u' \cdot v = \left[-4at \cdot e^{-0.5at}\right]_0^x + 4a \cdot \left[\frac{1}{-0.5a} \cdot e^{-0.5at}\right]_0^x$$

$$\int_0^x u' \cdot v = \left[-4at \cdot e^{-0.5at}\right]_0^x - 8 \cdot \left[e^{-0.5at}\right]_0^x$$

$$= 4ax \cdot e^{-0.5ax} - (0 \cdot 1) - 8 \cdot (e^{-0.5ax} - 1)$$

$$= 4ax \cdot e^{-0.5ax} - 8 \cdot e^{-0.5ax} - 8$$

$$F(x) = -4ax \cdot e^{-0.5ax} - 8 \cdot e^{-0.5ax} + c$$

$$F(x) = (-4ax - 8) \cdot e^{-0.5ax} + c$$

15 Substitution

$a)\int (x+1)^2$ dx	u=x+1 f(x)=$\frac{1}{3}(x+1)^3$+C
b) $\int e^{3x-1}\, dx$	u=3x-1 f(x)=$\frac{1}{3} \cdot e^{3x-1} + C$
c) $\int \cos(2x)\, dx$	u=2x f(x)=$\frac{sin2x}{2} + C$
d) $\int \frac{3}{3+1}\, dx$	u=3x+1 f(x)=ln(|3x+1|)+C
e) $\int \sin(10x-3)\, dx$	u=10x-3 f(x)= -cos(10x-3)·$\frac{1}{10} + C$

f) $\int e^{5x+5}\, dx$	$u = 5x + 5$ $F(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{5x+5} + C$
g) $\int 4x \cdot \sin(2x^2 + 2)\, dx$	$u = 2x^2 + 2$ $F(x) = -\cos(2x^2 + 2) + C$
h) $\int 3x^2 \cdot e^{x^3}\, dx$	$u = x^3$ $F(x) = e^{x^3} + C$
i) $\int 2x^5 \cdot \cos(x^6 + 2)\, dx$	$u = x^6 + 2$ $F(x) = \frac{2}{6} \cdot sin(x^6 + 2) + C$
j) $\int 3x \cdot sin(x^2 + 1)\, dx$	$u = x^2 + 1$ $F(x) = -\frac{3}{2} \cdot cos(x^2 + 1) + C$

16 Uneigentliche Integrale

Bei der Untersuchung von **unbegrenzten Flächen** auf einen Inhalt untersucht man Integrale mit einer variablen Grenze und einer festen Grenze wie $\int_1^z f(x)dx$ oder wie $\int_z^3 f(x)dx$ auf einen **Grenzwert** für $z \to \pm\infty$ bzw. für $z \to c$ (c ist eine Konstante). Existieren die Grenzwerte, schreibt man: $\lim_{z\to\infty} \int_1^z f(x)dx$ bzw. $\lim_{z\to c} \int_z^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx.$

Diese Integrale, die sich als Grenzwert ergeben, nennt man **uneigentliche Integrale**.

Nach rechts unbegrenzte Fläche:

Um den Inhalt der nach rechts unbegrenzten Fläche in Fig. 1 zu untersuchen, berechnet man zunächst mit der variablen rechten Grenze den Inhalt der Fläche über dem Intervall [1:z]

A(z)=$\int_1^z \frac{2}{x^2}\, dx = [-\frac{2}{x}]_1^z = -\frac{2}{z} + 2 = 2 - \frac{2}{z}$

Da A(z) -> 2 für z -> +∞ gilt,

ist der Flächeninhalt der unbegrenzten Fläche in Fig. 1 A=2

Nach oben unbegrenzte Fläche:

Um den Inhalt der nach oben unbegrenzten Fläche in Fig. 2 zu untersuchen, berechnet man zunächst mit der variablen linken Grenze z den Inhalt der Fläche über dem Intervall [z;3].

$$A(z) = \int_z^3 \frac{2}{x^2}\,dx = [\frac{-2}{x}]_z^3 = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

Da $A(z) \to +\infty$ für $z \to 0$ und $(0 < z < 3)$ … ergänzen!

17 Volumen von Rotationskörpern

Skriptende